## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**Α.** (α) Σχολικό σελ.175
(β) Σχολικό σελ.135

**Β.** (α) Λ
(β) Λ
(γ) Σ
(δ) Σ

**Γ.** Δ

## ΘΕΜΑ Β

Έστω $f(x) = 2\alpha\eta\mu^3x + (2\beta - 6)\eta\mu^2x - (3\beta - \alpha)\eta\mu x + \beta$

**Β.1.** Αφού διέρχεται από το σημείο Α $(0, \sqrt{3})$ είναι : $f(0) = \sqrt{3}$

Άρα : $2\alpha\eta\mu^3 0 + (2\beta - 6)\eta\mu^2 0 - (3\beta - \alpha)\eta\mu 0 + \beta = \boxed{\sqrt{3} \Leftrightarrow \beta} = \sqrt{3}$

Αφού η $x = \dfrac{\pi}{6}$ είναι ρίζα της $f(x)$ πρέπει : $f(\dfrac{\pi}{6}) = 0$

Άρα : $2\alpha\eta\mu^3\dfrac{\pi}{6} + (2\beta - 6)\eta\mu^2\dfrac{\pi}{6} - (3\beta - \alpha)\eta\mu\dfrac{\pi}{6} + \beta = 0$

$$2\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^3 + (2\beta - 6)\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (3\beta - \alpha)\left(\frac{1}{2}\right) + \beta = 0$$

$$2\alpha\frac{1}{8} + (2\beta - 6)\frac{1}{4} - (3\beta - \alpha)\frac{1}{2} + \beta = 0$$

$$2\alpha + 2(2\beta - 6) - 4(3\beta - \alpha) + 8\beta = 0$$

$$2\alpha + 4\beta - 12 - 12\beta + 4\alpha + 8\beta = 0 \Leftrightarrow 6\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

**Β.2.** (α.) Για $\alpha = 2$ και $\beta = \sqrt{3}$ η $f$ γίνεται :

$f(x) = 4\eta\mu^3x + (2\sqrt{3} - 6)\eta\mu^2x - (3\sqrt{3} - 2)\eta\mu x + \sqrt{3}$

Είναι : $f(x) = 0$

$4\eta\mu^3x + (2\sqrt{3} - 6)\eta\mu^2x - (3\sqrt{3} - 2)\eta\mu x + \sqrt{3} = 0$

Θέτω : $\eta\mu x = y$

Άρα : $4y^3 + (2\sqrt{3} - 6)y^2 - (3\sqrt{3} - 2)y + \sqrt{3} = 0$

Σχήμα Horner:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | $2\sqrt{3}-6$ | $-(3\sqrt{3}-2)$ | $\sqrt{3}$ | 1 |
| | 4 | $2\sqrt{3}-2$ | $-\sqrt{3}$ | |
| 4 | $2\sqrt{3}-2$ | $-\sqrt{3}$ | 0 | |

Παραγοντοποιούμε :

$(y-1)(4y^3+(2\sqrt{3}-2)y^2-\sqrt{3})=0$

$y-1=0$ ή $4y^3+(2\sqrt{3}-2)y^2-\sqrt{3}=0$

$y=1$ ή $\Delta=(2\sqrt{3}-2)^2-4\cdot4\cdot(-\sqrt{3})=$

$=(2\sqrt{3})^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot2+2^2+16\sqrt{3}=$

$=(2\sqrt{3})^2-8\sqrt{3}+2^2+16\sqrt{3}$

$=(2\sqrt{3})^2+8\sqrt{3}+2^2=$

$=(2\sqrt{3}+2)^2$

$$y_1=\frac{-(2\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}+2)}{8}=\frac{-2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}+2}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$y_2=\frac{-(2\sqrt{3}-2)-(2\sqrt{3}+2)}{8}=\frac{-2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}-2}{8}=\frac{-4\sqrt{3}}{8}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Επομένως :

$y=1$ ή $y=\frac{1}{2}$ ή $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\eta\mu x=1$ | $\eta\mu x=\frac{1}{2}$ | $\eta\mu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{2}$ | $\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}$ | $\eta\mu x=-\eta\mu\frac{\pi}{3}$

$x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$ | $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in Z$ | $\eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$ | $x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6},\ \kappa\in Z$ | $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z$

$x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z$

**(β)** Είναι : $f(0)=\sqrt{3}$ , $f(\frac{\pi}{6})=0$ , $f(\frac{\pi}{2})=0$

Άρα : $g(x)=-2x^3-x^2-3x+2$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{-2x^3}-x^2-3x+2 & x+1 \\ \hline \cancel{+2x^3}\qquad +2x & -2x^2-x \end{array}$$

$$\cancel{-x^2}\cancel{-x}+2$$
$$\cancel{+x^2}\cancel{+x}+2$$
$$\overline{\qquad\qquad 2 \qquad\qquad}$$

Άρα : $\pi(x) = -2x^2 - x$ και $\upsilon = 2$

Επομένως : $\boxed{-2x^3 - x^2 - 3x + 2 = (-2x^2 - x)(x+1) + 2}$

**ΘΕΜΑ Γ**

**α)** $D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$

Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε το (Σ) έχει μία λύση

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 5\lambda^4 - 4 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{\lambda(5\lambda^4-4)-\lambda^2}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{\lambda(5\lambda^4-\lambda-4)}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{5\lambda^4-\lambda-4}{\lambda-1}$$

$$\psi = \frac{D_4}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 5\lambda^4 - 4 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{\lambda^2-(5\lambda^4-4)}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{-5\lambda^4+\lambda^2+4}{\lambda(\lambda-1)}$$

αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$

για $\lambda = 0 \Leftrightarrow (\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0\psi = -4 \\ x + 0\psi = 0 \end{cases}$ αδύνατο

για $\lambda = 1 \Leftrightarrow (\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \psi = 1 \\ x + 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + \psi = 1 \Leftrightarrow \psi = 1 - x$

άρα (Σ) έχει άπειρες λύσεις $(x, \psi) = (\kappa, 1-\kappa)$, $\kappa \in R$

**β)** Επειδή (Σ) έχει μία λύση $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$

είναι $x_0 = \dfrac{\lambda(5\lambda^4-4)-\lambda^2}{\lambda(\lambda-1)}$, $\psi_0 = \dfrac{\lambda^2-(5\lambda^4-4)}{\lambda(\lambda-1)}$

$$x_0 + \psi_0 = \frac{\lambda(5\lambda^4-4)\cancel{-\lambda^2}\cancel{+\lambda^2}-(5\lambda^4-4)}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{(5\lambda^4-4)\cancel{(\lambda-1)}}{\lambda\cancel{(\lambda-1)}} = \frac{5\lambda^4-4}{\lambda}$$

Τότε

**i)** $x_0 + \psi_0 = \lambda^2 + \lambda - 1 \Leftrightarrow \dfrac{5\lambda^4 - 4}{\lambda} = \lambda^2 + \lambda - 1 \Leftrightarrow$

$$5\lambda^4 - 4 = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda \Leftrightarrow 5\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 5 & -1 & -1 & 1 & -4 & 1 \\ & 5 & 4 & 3 & 4 & \\ \hline 5 & 4 & 3 & 4 & 0 & \end{array}$$

έτσι έχουμε: (1) $\Leftrightarrow (\lambda - 1)(5\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 4) = 0$ (2)

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 3 & 4 & -1 \\ & -5 & 1 & -4 & \\ \hline 5 & -1 & 4 & 0 & \end{array}$$

έτσι έχουμε: (2) $\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)(5\lambda^2 - \lambda + 4) = 0$ (3)

$\Leftrightarrow \lambda - 1 = 0$ ή $\lambda + 1 = 0$ ή $5\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$ (αδύνατη $\Delta < 0$)

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

ή λ = 1 απορρίπτεται.

**ii)** $x_0 + \psi_0 \geq \lambda^2 + \lambda - 1 \Leftrightarrow \dfrac{5\lambda^4 - 4}{\lambda} \geq \lambda^2 + \lambda - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5\lambda^4 - 4}{\lambda} - \lambda^2 - \lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5\lambda^4 - 4 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda}{\lambda} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 4}{\lambda} \geq 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)(5\lambda^2 - \lambda + 4)}{\lambda} \geq 0$$

$$\overset{\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1}{\Leftrightarrow} \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)(5\lambda^2 - \lambda + 4) \geq 0$$

$$\underset{\forall \lambda \in R}{\overset{5\lambda^2 - \lambda + 4 > 0}{\Leftrightarrow}} \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) \geq 0 \qquad (4)$$

| λ | -∞ | -1 | | 0 | | +1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| λ | − | | − | ο | + | | + | |
| λ-1 | − | | − | | − | ο | + | |
| λ+1 | − | ο | + | | + | | + | |
| Γ | − | ο | + | ο | − | ο | + | |

Από τον πίνακα προκύπτει (4) $\Leftrightarrow \lambda \in [-1, 0) \cup (1, +\infty)$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ.1.** Πρέπει : $\dfrac{4-e^{2x}}{3e^{x}} > 0$ και επειδή $e^{x} > 0$ πρέπει $4 - 2e^{x} > 0 \;\Leftrightarrow$

$$-2e^{x} > -4 \;\Leftrightarrow\; 2e^{x} < 4 \Leftrightarrow e^{x} < 2 \;\Leftrightarrow\; x < \ln 2$$

Επομένως $A = (-\infty, \ln 2)$

**Δ.2.** Πρέπει : $f(x) > 0$ για κάθε χ στο $A = (-\infty, \ln 2)$. Είναι

$$\ln\frac{4-e^{2x}}{3e^{x}} > 0 \Leftrightarrow \ln\frac{4-e^{2x}}{3e^{x}} > \ln 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{4-e^{2x}}{3e^{x}} > 1 \Leftrightarrow 4 - e^{2x} > 3e^{x} \Leftrightarrow e^{2x} + 3e^{x} - 4 < 0$$

Θέτω : $e^{x} = y$

Άρα $y^2 + 3y - 4 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

| | -2 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| + | 0 | − | 0 | + |

Επομένως :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-2 < e^{x} < 1$ | δηλαδή | $e^{x} > -2$ | και | $e^{x} < 1$ |
| | | $x \in \Re$ | | $\ln e^{x} < 1$ |
| | | | | $x < 0$ |

Άρα $\chi < 0$.

**Δ.3.** $f(0) = \ln 1 = 0$

$$f\left(\ln\frac{2}{3}\right) = \ln\frac{4-e^{2\ln\frac{2}{3}}}{3e^{\ln\frac{2}{3}}} = \ln\frac{4-e^{\ln\frac{4}{9}}}{3\cdot\frac{2}{3}} = \frac{4-\frac{4}{9}}{2} = \frac{32}{18} = \frac{16}{9}$$

Άρα $f(0) < f\left(\ln\frac{2}{3}\right)$

Επιμέλεια: Θεοδωρίδης Θεοχάρης – Παρασκευόπουλος Κωνσταντίνος
Τομέας Μαθηματικών
Ορόσημο Αθήνας