ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^{o}

Α. 1 – Λ 2 – Σ 3 – Λ 4 – Λ 5 – Λ

Β. Σχολικό Βιβλίο σελ. 46 Θεώρημα ΙΙΙ

Γ. Σχολικό Βιβλίο σελ. 123

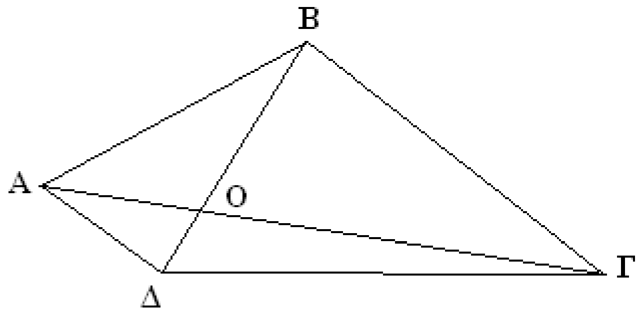
Θέμα 2^{o}

Α. Επειδή ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ έχουμε $\hat{\Gamma} < \hat{B} < \hat{A}$. Τότε

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} + \hat{B}_{\varepsilon\xi} = 180^0 \\ \hat{B} = \dfrac{1}{3}\hat{B}_{\varepsilon\xi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{B} + 3\hat{B} = 180^0 \\ 3\hat{B} = \hat{B}_{\varepsilon\xi} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = 45^{o}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^{o} \\ \hat{\Gamma} = \dfrac{1}{8}\hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{\Gamma} = 135^{o} \\ 8\hat{\Gamma} = \hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9\hat{\Gamma} = 135^{o} \\ 8\hat{\Gamma} = \hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{\Gamma} = 15^{o} \\ \hat{A} = 120^{o} \end{array}\right\}$$

Β. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ο. Τότε ο πρώτος τουρίστας έκανε τη διαδρομή
ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ ενώ ο δεύτερος έκανε την διαδρομή
ΑΓ + ΓΑ + ΑΔ + ΔΒ + ΒΔ



Τριγωνική ανισότητα στο $O\hat{A}B$: ΑΒ < ΟΑ + ΟΒ (1)
Τριγωνική ανισότητα στο $O\hat{B}\Gamma$: ΒΓ < ΟΒ + ΟΓ (2)

Τριγωνική ανισότητα στο $\overset{\triangle}{O\Gamma\Delta}$: ΓΔ < ΟΓ + ΟΔ (3)

Τριγωνική ανισότητα στο $\overset{\triangle}{O\Delta A}$: ΔΑ < ΟΔ + ΟΑ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2), (3), (4) :

$$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A < 2\left(OA + OB + O\Gamma + O\Delta\right) \Leftrightarrow$$

$$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A < 2A\Gamma + 2B\Delta < 2A\Gamma + 2B\Delta + A\Delta$$

Άρα ο δεύτερος τουρίστας διάνυσε περισσότερα χιλιόμετρα με το αυτοκίνητό του από τον πρώτο.

Θέμα 3ο

α) Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta B\Gamma}$ έχουμε

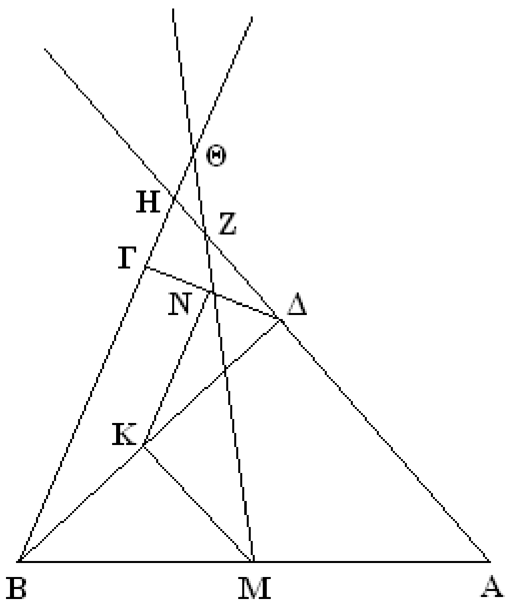
$$\left.\begin{array}{l} N \text{ μέσον } \Gamma\Delta \\ K \text{ μέσον } B\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow KN = // \frac{1}{2}B\Gamma \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta BA}$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ μέσον } AB \\ K \text{ μέσον } B\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow KM = // \frac{1}{2}A\Delta \quad (2)$$

Άρα

$$KN = KM \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{2}B\Gamma = \frac{1}{2}A\Delta \Leftrightarrow B\Gamma = A\Delta$$



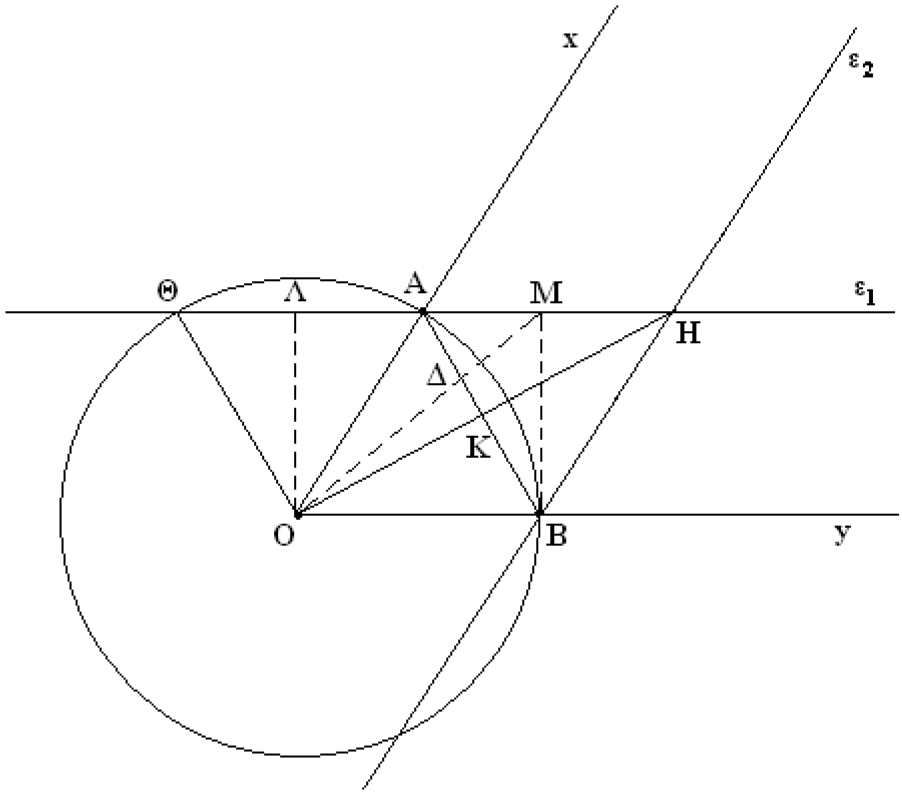
β) Έστω ότι η ΜΝ τέμνει την ΑΔ στο Ζ, την ΒΓ στο Θ και οι ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Η. Τότε

$H\widehat{\Theta}Z = K\widehat{N}M$ **(3)** ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΒΘ//ΚΝ με τέμνουσα την ΜΘ.

$H\widehat{Z}\Theta = K\widehat{M}N$ **(4)** ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΗ//ΜΚ με τέμνουσα την ΜΘ.

Τότε $KN = KM \Leftrightarrow K\widehat{N}M = K\widehat{M}N \underset{(4)}{\overset{(3)}{\Leftrightarrow}} H\widehat{\Theta}Z = H\widehat{Z}\Theta$ άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Theta H Z}$ είναι ισοσκελές.

Θέμα 4^{o}



α) Έχουμε $\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 // Oy \\ \varepsilon_2 // Ox \end{array}\right\} \Rightarrow OBHA \ \ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o \\ OA = OB = \rho \end{array}\right\} \Rightarrow OBHA \ \ \rho\acute{o}\mu\beta o\varsigma$

(παραλληλόγραμμο με δυο διαδοχικές πλευρές ίσες) άρα οι διαγώνιες του διχοτομούν τις γωνίες του άρα η ΟΗ διχοτομεί την $x\widehat{O}y$.

β) Έστω Κ το κοινό σημείο των διαγωνίων του ρόμβου ΟΒΗΑ. Επειδή ΑΒ και ΟΗ διχοτομούνται στο Κ, στο τρίγωνο $O\overset{\triangle}{A}H$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} OM \ \ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma \\ AK \ \ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \ \ \beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o \Leftrightarrow A\Delta = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AB = \frac{1}{3}AB \, .$$

γ) Έχουμε $\varepsilon_1 // Oy \Rightarrow OBH\Theta \ \ \tau\rho\alpha\pi\acute{\varepsilon}\zeta\iota o$. Επίσης

$\left.\begin{array}{l} O\Theta = OA = \rho \\ OA = BH \ \ (\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu. \ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma \ \pi\alpha\rho/\mu o\upsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow O\Theta = BH$ άρα ΟΒΗΘ ισοσκελές τραπέζιο άρα οι διαγώνιές του είναι ίσες δηλαδή ΒΘ = ΟΗ.

δ) Έστω ΟΛ απόστημα της χορδής ΑΘ. Τότε $\left\{\begin{array}{l} O\Lambda \perp A\Theta \\ \Lambda \ \ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\nu \ \ A\Theta \end{array}\right.$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Theta O \Lambda}$ και $\overset{\triangle}{H B M}$

$$\left.\begin{array}{l} O\Theta = BH \\ \Theta\Lambda = \frac{1}{2}A\Theta = \frac{1}{2}AH = MH \\ O\hat{\Theta}\Lambda = B\hat{H}M \text{ (γωνίες βάσης ισοσκ. τραπ.)} \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \overset{\triangle}{\Theta O \Lambda} = \overset{\triangle}{H B M} \Rightarrow B\widehat{M}H = O\widehat{\Lambda}\Theta = 90^{\circ}$$

Επιμέλεια: Νασιόπουλος Στέργιος
Τομέας Μαθηματικών
Ορόσημο ΑΘΗΝΑΣ