ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α.1. Σχολικό σελ. 113

Α.2. Σχολικό σελ. 113

Α.3. α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ

Β1. Είναι : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} - \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$

$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = 5\vec{\alpha} - 15\vec{\beta} - \vec{\alpha} - \vec{\beta} = 4\vec{\alpha} - 16\vec{\beta} = 4(\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$

Άρα : $\overrightarrow{A\Gamma} = 4\overrightarrow{AB}$, δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}$ είναι συγγραμμικά έχουν κοινό σημείο το Α , επομένως τα σημεία Α , Β και Γ είναι συνευθειακά

Β2. **(α.)** $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 8\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 16\vec{\beta}^2$

$= \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 8\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 16\left|\vec{\beta}\right|^2 = 4^2 - 8\cdot 2 + 16 = 16 - 16 + 16 = 16$

Άρα $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = 4$

Όπου $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 2$

(β.) $\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\vec{u}\right|}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = \left(\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\right) = \vec{\alpha}^2 - \left(4\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 16\vec{\beta}^2 = 16 - 16 = 0$

Άρα τα διανύσματα είναι κάθετα, επομένως η γωνία που σχηματίζουν είναι 90^o

Γ.1. Θεωρούμε την εξίσωση τριώνυμο ως προς x, $x^2 - 2\lambda x - (y^2 + \underline{4\lambda x} + 3\lambda^2) = 0$, με $\alpha = 1$, $\beta = -2\lambda$ και $\gamma = -(y^2 + 4\lambda y + 3\lambda^2)$.

Τότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4\lambda^2 + 4 (y^2 + 4\lambda y + 3\lambda^2) =$

$= 4 (\lambda^2 + y^2 + 4\lambda y + 3\lambda^2) =$

$= 4 (4\lambda^2 + y^2 + 4\lambda y) = 4(2\lambda + y)^2$

Έτσι $x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\lambda+2(2\lambda+y)}{2}=\lambda+2\lambda+y=3\lambda+y$

Αρα : (ε_1) : $x-y-3\lambda=0$ με $\lambda_1=1$ και

$x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\lambda-2(2\lambda+y)}{2}=\lambda-2\lambda-y=-\lambda-y$

Αρα : (ε_2) : $x+y+\lambda=0$ με $\lambda_2=-1$

Επειδή $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$ οι ευθείες είναι κάθετες

Γ.2. Βρίσκουμε το σημείο τομής λύνοντας το σύστημα : $\begin{cases} x-y=3\lambda \\ x+y=-\lambda \end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε : $2x=2\lambda \Leftrightarrow x=\lambda$

Από $x+y=-\lambda \Leftrightarrow \lambda+y=-\lambda \Leftrightarrow y=-2\lambda$

Επομένως το σημείο τομής είναι Μ (λ , -2λ). Έστω C ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ. Για ένα τυχαίο σημείο Ν(χ,y) ισχύει:

$$N(x,y)\in C \Leftrightarrow \quad x=\lambda \text{ και } y=-2\lambda$$

και με απαλοιφή του λ βρίσκουμε $y=-2x$ η οποία είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Γ.3.α. Για λ = 1 είναι Μ (1 , -2)

Το σημείο Α είναι σημείο τομής της (ε_1) : $x-y-3=0$ με τον y΄y

Άρα για x = 0 έχουμε y = -3 , δηλ. Α (0 , -3)

Το σημείο Β το σημείο τομής της (ε_2) : $x+y+1=0$ με τον x΄x

Άρα για y = 0 έχουμε x = -1 , δηλ. Β (-1 , 0)

$\overrightarrow{AB}=(-1,3)$

$\overrightarrow{AM}=(1,1)$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1-3=-4$

Το εμβαδόν (ΑΒΜ) = $\frac{1}{2}|-4|=\frac{4}{2}=2$ τ.μ.

β. Βρίσκουμε το σημείο από το οποίο διέρχονται οι ευθείες:

$(\alpha^2+\alpha+2)x+(\alpha-3)y-(3\alpha^2+5\alpha)=0$

Για α = 0 έχουμε την ευθεία (ζ_1) : $2x-3y=0$

Για α = -1 έχουμε την ευθεία (ζ_2) : $-2x+4y-2=0$

Λύνοντας το σύστημα των (ζ_1) και (ζ_2) βρίσκουμε Κ (3 , 2) το οποίο επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση , άρα όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο Κ (3 , 2)

$d(K, \varepsilon_1) = \dfrac{|1\cdot 3 - 1\cdot 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$d(K, \varepsilon_2) = \dfrac{|1\cdot 3 + 1\cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

Επειδή $d(K, \varepsilon_1) < d(K, \varepsilon_2)$ η ευθεία (ε_2) βρίσκεται πιο μακριά από ότι η (ε_1)

Δ.1. Η εξίσωση του κύκλου είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$.

Αφού διέρχεται από το $A(1, 4)$: $1 + 16 + A + 4B + \Gamma = 0 \Leftrightarrow A + 4B + \Gamma = -17$

Αφού διέρχεται από το $B(6, -1)$: $36 + 1 + 6A - B + \Gamma = 0 \Leftrightarrow 6A - B + \Gamma = -37$

Αφού διέρχεται από το $\Gamma(4, 3)$: $16 + 9 + 4A + 3B + \Gamma = 0 \Leftrightarrow 4A + 3B + \Gamma = -25$

Λύνοντας την πρώτη ως προς $\Gamma = -17 - A - 4B$

Και αντικαθιστώντας στις άλλες δυο βρίσκουμε ; $A = -2$, $B = 2$ και $\Gamma = -23$

Άρα $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$

Με κέντρο $K(1, -1)$ και ακτίνα $\rho = 5$

Δ.2. Παρατηρώ ότι το Γ ανήκει στον κύκλο δηλαδή είναι σημείο επαφής του κύκλου και της ζητούμενης εφαπτομένης.

Αν $M(x, y)$ τυχαίο σημείο πάνω στην εφαπτομένη πρέπει $(\Gamma K) \perp (\Gamma M)$.

Όμως $\overrightarrow{\Gamma K} = (-3, -4)$ και $\overrightarrow{\Gamma M} = (x - 4, y - 3)$

Πρέπει : $\overrightarrow{\Gamma K} \cdot \overrightarrow{\Gamma M} = 0 \Leftrightarrow -3(x - 4) - 4(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 12 + 4y - 12 = 0$

Αρα: $3x + 4y - 24 = 0$

Δ.3. Η παραβολή είναι της μορφής : $y^2 = 2px$

Αφού διέρχεται από το $A(1, 4)$ είναι $16 = 2p \Leftrightarrow p = 8$

Αρα $y^2 = 16x$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(x_1, y_1)$ της παραβολής είναι

$yy_1 = p(x + x_1) \Leftrightarrow yy_1 = 8(x + x_1) \Leftrightarrow yy_1 = 8x + 8x_1$ με $\lambda = \dfrac{8}{y_1}, y_1 \neq 0$

Αφού είναι παράλληλη στην $2x - y + 2013 = 0$ πρέπει : $\dfrac{8}{y_1} = 2 \Leftrightarrow y_1 = 4$

Αφού ανήκει και στην παραβολή θα είναι ; $y_1^2 = 16x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1$.

Αν $y_1 = 0$ τότε η εφαπτομένη θα είναι της μορφής $\chi=\chi_0$ δηλαδή κατακόρυφη. Αδύνατο αφού είναι παράλληλη στην στην $2x - y + 2013 = 0$

Αρα η εφαπτομένη είναι : $4y = 8x + 8 \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$

Επιμέλεια: Θεοδωρίδης Θεοχάρης
Τομέας Μαθηματικών
Ορόσημο ΑΘΗΝΑΣ