ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Θεωρία σελίδα 15

Α2. Θεωρία σελίδα 15

Α3. (α) Σ **(β)** Λ **(γ)** Λ **(δ)** Λ **(ε)** Σ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Πρέπει $2x^2-6x+4\neq 0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(x^2-3x+2\right)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \;\kappa\alpha\iota\; x\neq 1$

Επομένως $\mathrm{A}=\Re-\{1,2\}$

Β2. $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{2\cdot\left(x^2-3x+2\right)}=\dfrac{(x+3)(x-2)}{2(x-2)(x-1)}=\dfrac{x+3}{2(x-1)}$

Β3. $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{2(x-1)}\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-3,1)$

Β4. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{2(x-1)}=\dfrac{5}{4}$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Αφού τα σημεία Α και Β ανήκουν στην ευθεία (ε_1) τότε την επαληθεύουν άρα $y_{\mathrm{A}} = -2x_{\mathrm{A}} + 4 = -2\cdot 1 + 4 = 2$ και $y_{\mathrm{B}} = -2x_{\mathrm{B}} + 4 = -2\cdot 2 + 4 = 0$. Άρα τα σημεία $\mathrm{A}(1,2)$ και $\mathrm{B}(2,0)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της f επομένως $f(1) = 2 \Leftrightarrow 1 - \alpha + \beta = 2 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = 1 (1)$ και $f(2) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\alpha + \beta = -4 \Leftrightarrow 2\alpha - \beta = 4 (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow \alpha = 5$ και $(1) \Rightarrow \beta = 6$

Γ2. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους $\left\{\begin{matrix} y = -3x - 4 \\ f(x) = x^2 - 5x + 6 \end{matrix}\right\}$.

Έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = -3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 10 = 0$ όπου $\Delta = -36 < 0$

Άρα η γραφική παράσταση της f και η ευθεία (ε_2) δεν έχουν κοινό σημείο.

Γ3. Έχουμε $f(x)\cdot g(x) - 1 = (x^2 - 5x + 6)\cdot\left(\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}\right) - 1 =$

$(x-2)\cdot(x-3)\cdot\left(\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}\right) - 1 = x - 3 + x - 2 - 1 = 2x - 6 = 2(x-3)$

Άρα $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2\cdot(x-3)}{x-3} = 2$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού με συντελεστές $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και $\alpha + \delta = \beta = \gamma$. Άρα $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = \alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \delta$. Ακόμα

$f(3) = 26 \Rightarrow 27\alpha + 9\beta + 3\beta + \delta = 26 \Leftrightarrow 27\alpha + 12\beta + \delta = 26 \overset{\alpha+\delta=\beta}{\Longleftrightarrow} 27\alpha + 12\beta + \beta - \alpha = 26$

$\Leftrightarrow 26\alpha + 13\beta = 26\ (1)$

Η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής , άρα $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4)$ επομένως,

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)\cdot\cancel{(x-4)}\cdot(x+4)\cdot\left(2+\sqrt{x}\right)}{32\cdot\cancel{(x-4)}}=63\Leftrightarrow\frac{f(4)\cdot 8\cdot 4}{32}=63\Leftrightarrow f(4)=63\Leftrightarrow$$

$$\alpha\cdot 4^3+\beta\cdot 4^2+\gamma\cdot 4+\delta=63\Leftrightarrow 64\alpha+16\beta+4\gamma+\delta=63\overset{\beta=\gamma}{\Longleftrightarrow}64\alpha+16\beta+4\beta+\beta-\alpha=63\Leftrightarrow$$

$$63\alpha+21\beta=63\underset{:21}{\overset{\delta=\beta-\alpha}{\Longleftrightarrow}}\beta=3-3\alpha\,(2)$$

$$(1)\overset{(2)}{\Longrightarrow}26\alpha+13(3-3\alpha)=26\Leftrightarrow 26\alpha+39-39\alpha=26\Leftrightarrow -13\alpha=-13\Leftrightarrow\alpha=1$$

$(2)\Rightarrow\beta=0$. Επομένως $\beta=\gamma=0$ και $\alpha+\delta=0\overset{\alpha=1}{\Longrightarrow}\delta=-1$. Άρα $f(x)=x^3-1$

Δ2. Έχουμε ότι $f(0)=-1$ άρα $g(x)=\begin{cases}-1, & x=1\\ \dfrac{\kappa\cdot\left(x^2-x\right)}{x-1}, & x\neq 1\end{cases}$.

Αφού η g είναι συνεχής στο $x_0=1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\kappa x\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-1\Leftrightarrow\kappa=-1$

Δ3. Αφού $x_1,x_2,\ldots,x_\nu\in(1,+\infty)$ με $g(x)=\dfrac{\kappa x\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-x$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Επομένως $x_1<x_2<\ldots<x_\nu\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)>\ldots>g(x_\nu)$. Έστω $g(x_\nu)>\dfrac{1}{\nu}$

Τότε $g(x_1)>\dfrac{1}{\nu}$ και $g(x_2)>\dfrac{1}{\nu}$ …. $g(x_\nu)>\dfrac{1}{\nu}$ Άρα $g(x_1)+g(x_2)+\ldots+g(x_\nu)>\dfrac{1}{\nu}+\dfrac{1}{\nu}+\ldots+\dfrac{1}{\nu}=\dfrac{\nu}{\nu}=1$,

δηλαδή $g(x_1)+g(x_2)+\ldots+g(x_\nu)>1$ άτοπο. Άρα $g(x_\nu)\leq\dfrac{1}{\nu}$.

Επιμέλεια: Κατσίμπρας Ευθύμης

Τομέας Μαθηματικών

Ορόσημο Πειραιά