ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **(i)** Βλέπε σχολ. βιβλίο σελ 97

(ii) Βλέπε σχολ. βιβλίο σελ 98

Α2. Βλέπε σχολ. βιβλίο σελ 98

Α3. Λ, Σ, Λ, Λ, Λ

Α4. (ii), (iv)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z^2-2z+2=0$, όπου z μιγαδικός αριθμός.

Β1. Είναι $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot2=-4<0$. Άρα $z_{1,2}=\dfrac{2\pm i\sqrt{4}}{2}=1\pm i$

Β2.

$$A=z_1^{2014}+z_2^{2014}=\left((1+i)^2\right)^{1007}+\left((1-i)^2\right)^{1007}=$$
$$=(2i)^{1007}+(-2i)^{1007}=0$$

Β3.

$$z-z_1\cdot z_2=i\cdot(z-2)\Leftrightarrow z-2=i\cdot(z-2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z-2)(1-i)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z=2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $z=x+yi$ τότε $\left.\begin{array}{l}x=3\eta\mu\theta\\ y=4\sigma\upsilon\nu\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\eta\mu\theta=\dfrac{x}{3}\\ \sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{y}{4}\end{array}\right\}$ με $0\le\theta\le\pi$

Έτσι $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{y}{4}\right)^2=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$

Επίσης για $0 \le \theta \le \pi$ είναι $\begin{cases} 0 \le \eta\mu\theta \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 3 \\ -1 \le \sigma\upsilon\nu\theta \le 1 \Leftrightarrow -4 \le y \le 4 \end{cases}$

Έτσι η εικόνα $M(z)$ βρίσκεται στο τμήμα της έλλειψης με κορυφές $A(0,4)$, $A'(0,-4)$, $B(3,0)$, $B'(-3,0)$ που βρίσκεται στο 1^{o} και 4^{o} τεταρτημόριο ου συστήματος.

Γ2. Παρατηρούμε ότι $\alpha + i = i(1-\alpha i)$ και $i - \alpha = i(1+\alpha i)$

Έτσι θα είναι $\left(\dfrac{\alpha+i}{1-\alpha\cdot i}\right)^{2\nu} + \left(\dfrac{i-\alpha}{1+\alpha\cdot i}\right)^{2\nu} = \left(\dfrac{i(1-\alpha\cdot i)}{1-\alpha\cdot i}\right)^{2\nu} + \left(\dfrac{i(1+\alpha\cdot i)}{1+\alpha\cdot i}\right)^{2\nu} =$

$$= 2\cdot i^{2\nu} = 2\cdot(-1)^{\nu}$$

<u>**ΘΕΜΑ Δ**</u>

Δ1.

$$|3z-1| = |z-3| \Leftrightarrow |3z-1|^2 = |z-3|^2 \Leftrightarrow (3z-1)(3\overline{z}-1) = (z-3)(\overline{z}-3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9z\overline{z} - 3z - 3\overline{z} + 1 = z\overline{z} - 3z - 3\overline{z} + 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Δ2. Λόγω του Δ1 είναι $|z_1| = 1$ και έτσι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$

Τότε $\overline{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$, $\overline{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$, $\overline{z}_3 = \dfrac{1}{z_3}$, και έτσι

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3| =$$
$$= \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = \left|\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3}{z_1 z_2 z_3}\right| =$$
$$= \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|} = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|$$

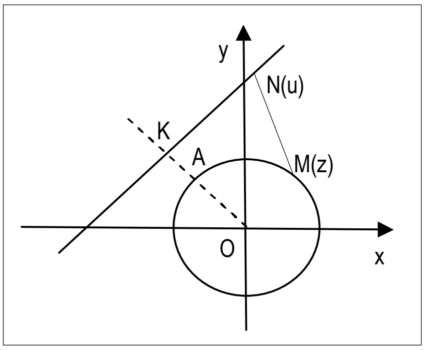
Δ3. Έστω $u = x + yi$. Επειδή $\mathrm{Re}(w) = -2$ θα είναι και $w = -2 + \beta i$ $\beta \in \mathbb{R}$.

Ισοδύναμα είναι

$$w = u\cdot(1+i) \Leftrightarrow -2 + \beta i = (x+yi)(1+i) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 + \beta i = x + xi + yi - y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - y = -2 \text{ και } x + y = \beta$$

Άρα ο γεωμ. τόπος είναι η ευθεία με εξίσωση $x - y = -2$.

Δ4. Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι η απόσταση (MN) των εικόνων των z, u αντίστοιχα γίνεται ελάχιστη όταν το τμήμα MN συμπέσει με το τμήμα AK που είναι κάθετο στην ευθεία ε. Δηλαδή ισχύει



$$(MN) \geq (AK) \Leftrightarrow (MN) \geq d(O,\varepsilon) - \rho \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (MN) \geq \frac{\left| |0 - 0 + 2 \right|}{\sqrt{1+1}} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (MN) \geq \sqrt{2} - 1$$

Άρα $(MN)_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \sqrt{2} - 1$

Επιμέλεια: ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ - ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ
Τομέας Μαθηματικών
Ορόσημο Πειραιά