ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΡΟΣΗΜΟ
ΙΑΤΡΙΚΟ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλ. σχολ. βιβλίο σελ. 251

Α2. Βλ. σχολ. βιβλίο σελ. 222

Α3. 1 – Σ 2 – Σ 3 – Σ 4 – Σ 5 - Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η εξίσωση (1) για $z \neq 0$ ισοδυναμεί με την $z^2 - \beta z + \alpha = 0$ που είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha < 0$ διότι $0 \leq \beta^2 < 3\alpha < 4\alpha$.

Άρα οι ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές συνεπώς

$$
\begin{aligned}
(z_1 + z_2)^\nu + (z_1 - z_2)^{2\nu} &= \left(z_1 + \overline{z_1}\right)^\nu + \left(z_1 - \overline{z_1}\right)^{2\nu} = \\
&= \left(2\,\mathrm{Re}(z_1)\right)^\nu + \left(\left(2\,\mathrm{Im}(z_1)\,i\right)^2\right)^\nu = \\
&= \left(2\,\mathrm{Re}(z_1)\right)^\nu + \left(-4\,\mathrm{Im}^2(z_1)\right)^\nu \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Β2. Αν $z_1 = 2 + i$ τότε $z_2 = 2 - i$ και από τους τύπους του Vieta έχουμε $\left.\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \beta \\ z_1 z_2 &= \gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \beta &= 4 \\ \gamma &= 5 \end{aligned}$

Β3. Για $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = 2 - i$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
|w - z_1 + i| = |w - z_2 + 2 + i| \Leftrightarrow |w - 2| = |w + 2i| &\overset{w = x + yi}{\Leftrightarrow} |x - 2 + yi| = |x + (y + 2)i| \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow y = -x
\end{aligned}
$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w είναι η ευθεία $y = -x$.

ΟΡΟΣΗΜΟ

Β4. Έστω $\mathbf{w_1}$ μιγαδικός του οποίου η εικόνα ανήκει στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (γ) με $|\mathbf{w_1}| = \mathbf{1}$. Τότε αν $\mathbf{w_1} = \alpha + \beta \mathbf{i}$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\beta = -\alpha \\ \alpha^2 + \beta^2 = \mathbf{1}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{2}\alpha^2 = \mathbf{1} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \text{ τότε } \beta = \mp\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

Τότε $\mathbf{u} - \mathbf{w_1} = \left(\overline{\dfrac{\rho^2}{\mathbf{u} - \mathbf{w_1}}}\right) \Leftrightarrow (\mathbf{u} - \mathbf{w_1})\left(\overline{\mathbf{u} - \mathbf{w_1}}\right) = \rho^2 \Leftrightarrow |\mathbf{u} - \mathbf{w_1}|^2 = \rho^2 \Leftrightarrow |\mathbf{u} - \mathbf{w_1}| = \rho$

Οι εικόνες των μιγαδικών u βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Κ(α,β) και ακτίνας ίσης με ρ. Επειδή το κέντρο βρίσκεται στην ευθεία y = -x ο κύκλος εφάπτεται στους άξονες $\mathbf{x'x}$ και $\mathbf{y'y}$ όταν $\rho = |\alpha| = |\beta|$

Άρα η εξίσωση $\mathbf{u} - \mathbf{w_1} = \left(\overline{\dfrac{\rho^2}{\mathbf{u} - \mathbf{w_1}}}\right)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{C}$ έχει μεταξύ των ριζών της μόνο μια πραγματική και μόνο μια φανταστική ρίζα όταν $\rho = \dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή $\mathbf{f(0) = f(1) = 0}$ η f έχει προφανείς ρίζες $\mathbf{x_1 = 0}$ και $\mathbf{x_2 = 1}$.

Έστω ότι η f έχει τρεις ρίζες στο R τις $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Τότε

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{f} \text{ συνεχής στα } [\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3] \text{ ως άθροισμα συνεχών} \\ \mathbf{f} \text{ παραγωγίσιμη στα } (\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3) \text{ ως άθροισμα παραγωγίσιμων} \\ \mathbf{f}(\rho_1) = \mathbf{f}(\rho_2) = \mathbf{f}(\rho_3) = \mathbf{0}\end{array}\right\} \overset{\Theta.R.}{\Rightarrow}$$

υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιος ώστε $\mathbf{f'}(\xi_1) = \mathbf{0}$

υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιος ώστε $\mathbf{f'}(\xi_2) = \mathbf{0}$

και $\mathbf{f'(x)} = \left(\mathbf{2}^{\mathbf{x}^2} - \mathbf{x} - \mathbf{1}\right)' = \mathbf{2}^{\mathbf{x}^2} \ln \mathbf{2} \left(\mathbf{x}^2\right)' - \mathbf{1} = \mathbf{2}^{\mathbf{x}^2} \ln \mathbf{2} \cdot \mathbf{2x} - \mathbf{1}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$.

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{f'} \text{ συνεχής στο } [\xi_1, \xi_2] \text{ ως άθροισμα συνεχών} \\ \mathbf{f'} \text{ παραγωγίσιμη στο } (\xi_1, \xi_2) \text{ ως άθροισμα παραγωγίσιμων} \\ \mathbf{f'}(\xi_1) = \mathbf{f'}(\xi_2) = \mathbf{0}\end{array}\right\} \overset{\Theta.R.}{\Rightarrow} \text{ υπάρχει } \xi \in (\xi_1, \xi_2)$$

τέτοιος ώστε $\mathbf{f''}(\xi) = \mathbf{0}$ που είναι άτοπο διότι

$$\mathbf{f''(x)} = \left(\mathbf{2}^{\mathbf{x}^2} \ln \mathbf{2} \cdot \mathbf{2x} - \mathbf{1}\right)' = \mathbf{2}^{\mathbf{x}^2} \ln^2 \mathbf{2} \cdot \mathbf{4x}^2 + \mathbf{2}^{\mathbf{x}^2} \ln \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} = \mathbf{2}^{\mathbf{x}^2} \ln^2 \mathbf{4} \cdot \mathbf{x}^2 + \mathbf{2}^{\mathbf{x}^2} \ln \mathbf{4} =$$
$$= \mathbf{2}^{\mathbf{x}^2} \ln \mathbf{4}\left(\mathbf{x}^2 \ln \mathbf{4} + \mathbf{1}\right) > \mathbf{0}$$

Άρα η f έχει το πολύ δύο ρίζες στο R άρα ακριβώς δύο τις προφανείς $\mathbf{x_1 = 0}$ και $\mathbf{x_2 = 1}$.

ΟΡΟΣΗΜΟ

Γ2. Έχουμε $\left.\begin{array}{l} \mathbf{f} \text{ συνεχής στο } [0,1] \\ \mathbf{f} \text{ παραγωγίσιμη στο } (0,1) \\ \mathbf{f}(0)=\mathbf{f}(1)=0 \end{array}\right\} \overset{\Theta.R.}{\Rightarrow}$ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.

Από το ερώτημα (α) έχουμε $f''(x)>0$ για κάθε $x \in R$ άρα η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R άρα και ΄΄1-1΄΄ συνεπώς ο ξ είναι μοναδικός.

Επειδή η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R

για $x<\xi \Leftrightarrow f'(x)<f'(\xi)$ άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (-\infty,\xi)$, η f ΄ είναι συνεχής στο $(-\infty,\xi]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\xi]$.

για $x>\xi \Leftrightarrow f'(x)>f'(\xi)$ άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x \in (\xi,+\infty)$, η f ΄ είναι συνεχής στο $[\xi,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\xi,+\infty)$.

Γ3. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\xi]$ άρα για $x \le 0 < \xi \Leftrightarrow f(x) \ge f(0) \Leftrightarrow f(x) \ge 0$ άρα $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,+\infty)$ άρα για $x \ge 1 > \xi \Leftrightarrow f(x) \ge f(1) \Leftrightarrow f(x) \ge 0$ άρα $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$.

Άρα $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0] \cup [1,+\infty)$.

Γ4. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\xi]$

$0 \le x \le \xi \Leftrightarrow f(0) \ge f(x) \ge f(\xi) \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [0,\xi]$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,1]$

$\xi \le x \le 1 \Leftrightarrow f(\xi) \le f(x) \le f(1) \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [\xi,1]$

Άρα $\left.\begin{array}{l} f(x) \le 0 \text{ για κάθε } x \in [0,1] \\ \text{η } f \text{ δεν μηδενίζεται παντού στο } [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση t^2 είναι συνεχής στο R ως πολυωνυμική, η συνάρτηση e^t είναι συνεχής για κάθε $t^2 \ge 0$. Άρα η συνάρτηση e^{t^2} είναι συνεχής στο R. Τότε η συνάρτηση $\dfrac{e^{t^2}+t}{t^2+1}$ είναι

ΟΡΟΣΗΜΟ

συνεχής στο R ως πράξεις μεταξύ συνεχών άρα και η $\mathbf{F(x)=\int_0^x \frac{e^{t^2}+t}{t^2+1}dt}$ είναι παραγωγίσιμη στο R άρα και στο [0,1]. Τότε $\mathbf{F'(x)=\left(\int_0^x \frac{e^{t^2}+t}{t^2+1}dt\right)'=\frac{e^{x^2}+x}{x^2+1}} \quad \mathbf{x\in\left[0,1\right]}$.

Δ2. Η $\mathrm{F'}$ είναι παραγωγίσιμη στο [0,1] ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$\mathbf{F''(x)=\left(\frac{e^{x^2}+x}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(2xe^{x^2}+1\right)\left(x^2+1\right)-2x\left(e^{x^2}+x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=}$$

$$\mathbf{=\frac{2x^3e^{x^2}+2xe^{x^2}+x^2+1-2xe^{x^2}-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3e^{x^2}+1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}>0}$$

για κάθε $\mathbf{x\in\left(0,1\right)}$.

Άρα η F είναι κυρτή στο [0,1] άρα η $\mathrm{C_F}$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενη στο $\mathbf{x_0}$ για κάθε $\mathbf{x\neq x_0}$.

Έχουμε $\mathbf{F(0)=\int_0^0 \frac{e^{t^2}+t}{t^2+1}dt=0}$ και $\mathbf{F'(0)=\frac{e^0+0}{0+1}=1}$ τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης στο $\mathbf{x_0=0}$ είναι $\mathbf{y-F(0)=F'(0)x\Leftrightarrow y=x}$

Άρα $\mathbf{F(x)\geq x}$ για κάθε $\mathbf{x\in[0,1]}$.

Δ3. Η σχέση ισχύει ως ισότητα προφανώς για x = 0.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $\mathbf{x^2<F(x^2)<\frac{x^2e^{x^2}+x^3}{x^2+1}}$ για κάθε $\mathbf{x\in\left(0,1\right]}$.

Έχουμε $$\mathbf{x^2<F(x^2)<\frac{x^2e^{x^2}+x^3}{x^2+1}\Leftrightarrow x^2<F(x^2)<\frac{x^2\left(e^{x^2}+x\right)}{x^2+1}\Leftrightarrow 1<\frac{F(x^2)}{x^2}<\frac{e^{x^2}+x}{x^2+1}}$$

Επειδή $\mathbf{F'(0)=1,\ F(0)=0}$ η τελευταία γίνεται ισοδύναμα $\mathbf{F'(0)<\frac{F(x^2)-F(0)}{x^2-0}<F'(x)}$.

Για $\mathbf{x\in\left(0,1\right]}$ έχουμε $\left.\begin{array}{l}\mathbf{F}\ \text{συνεχής στο}\ \left[0,x^2\right]\\ \mathbf{F}\ \text{παραγωγίσιμη στο}\ \left(0,x^2\right)\end{array}\right\}\overset{\text{ΘΜΤ}}{\Rightarrow}$ υπάρχει $\xi\in\left(0,x^2\right)$

ώστε $\mathbf{F'\left(\xi\right)=\frac{F(x^2)-F(0)}{x^2-0}}$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $\mathbf{F'(0)<F'\left(\xi\right)<F'(x)}$ για κάθε $\mathbf{x\in\left(0,1\right]}$.

Επειδή $\mathbf{F''(x)>0}$ για κάθε $\mathbf{x\in\left(0,1\right)}$ η F΄ είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1] άρα

$$\mathbf{0<\xi<x^2\leq x\Leftrightarrow F'(0)<F'\left(\xi\right)<F'(x^2)\leq F'(x)}$$

ΟΡΟΣΗΜΟ

Δ4. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{F^2(x)\left(\int_1^{x+1}\eta\mu\left(t-1\right)^2 dt\right)^3}{x^{11}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^2\left(\frac{\int_1^{x+1}\eta\mu\left(t-1\right)^2 dt}{x^3}\right)^3=$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}\right)^2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{x+1}\eta\mu\left(t-1\right)^2 dt}{x^3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

Διότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+x}{x^2+1}=1$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{x+1}\eta\mu\left(t-1\right)^2 dt}{x^3}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x^2}{3x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{3}\frac{\eta\mu y}{y}=\frac{1}{3}$$

Θέτουμε $y=x^2$, **τότε** $y_0=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

ΟΡΟΣΗΜΟ

Επιμέλεια: Νασιόπουλος Στέργιος – Παρασκευόπουλος Κωνσταντίνος

Τομέας Μαθηματικών

Ορόσημο ΑΘΗΝΑΣ