1. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$.**

Α1. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f που διέρχεται από το (0,0). Στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ευθεία ε και τον άξονα x΄x.

Α2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τη γραφική παράσταση της $g(x) = \ln\frac{1}{x}$ και την ευθεία y=ln2.

Α3. Να δείξετε ότι η $f(x) \le x^2 - x$ για κάθε x>0 και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\int_4^5 \frac{1}{f(x)} > \ln\frac{16}{15}$.

Α4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $h(x) = f(e^x - x) - x$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η C_h έχει δύο σημεία καμπής.

Α5. Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0}[(1-e^{-x})f(x)]$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^5(x)\eta\mu\pi x}{(x-1)^6}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Α1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως λογαριθμική με $f\,'(x) = \frac{1}{x}$

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο Α (α, f (α)) έχει εξίσωση

$y - f(\alpha) = f\,'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y - \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln\alpha$.

Αφού διέρχεται από το (0, 0) τότε οι συντεταγμένες του (0, 0) θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

$$0 = \frac{1}{\alpha}\cdot 0 - 1 + \ln\alpha \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$$

Άρα η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση $y = \frac{1}{e}x - 1 + \ln e \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x$.

Επειδή f κοίλη ισχύει $f(x) \le \frac{1}{e}x$ για κάθε $x > 0$.

$E = \int_0^1 \frac{1}{e}x\,dx + \int_1^e \left(\frac{1}{e}x - \ln x\right)dx =$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2e}\right)' dx + \int_1^e \frac{1}{e} x dx - \int_1^e \ln x dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2e}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2e}\right]_1^e - \int_1^e (x)' \cdot \ln x dx =$$

$$= \frac{1}{2e} - 0 + \frac{e^2}{2e} - \frac{1}{2e} - \left([x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)' dx \right) =$$

$$= \frac{e^2}{2e} - e \cdot \ln e + 1 \cdot \ln 1 + \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e}{2} - e + \int_1^e (x)' dx =$$

$$= -\frac{e}{2} + [x]_1^e = -\frac{e}{2} + e - 1 = \frac{e}{2} - 1.$$

Α2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln x = \ln\frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x = -\ln x \Leftrightarrow 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Οι C_f, C_g τέμνονται στο Β (1, 0)

Η C_f και η ευθεία y = ln2 τέμνονται στο Γ (2, ln2) . Η C_g και η ευθεία y = ln2 τέμνονται στο $\Delta\left(\frac{1}{2}, \ln 2\right)$.

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\ln 2 - \ln\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^2 (\ln 2 - \ln x) dx = \ldots = \frac{1}{2}$$

Α3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - (x^2 - x)$

$\varphi(x) = \ln x - x^2 + x, \quad x > 0$

φ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα λογ – πολ.

Άρα $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1 - 2x^2 + x}{x} = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$

$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + x + 1}{x} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -\frac{1}{2}$ (απορρίπτεται)

Για $x \in (0, 1)$ είναι $\varphi'(x) > 0$ και για $x \in (1, +\infty)$ είναι $\varphi'(x) < 0$

Η $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Άρα η $\varphi(x)$ παρουσιάζει στο $x = 1$ ολικό μέγιστο το $\varphi(1) = 0$.

Άρα $\varphi(x) \le \varphi(1)$

$f(x) - (x^2 - x) \le 0$

$f(x) \le x^2 - x \qquad$ για κάθε $x > 0$

(η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$)

Για $x \in [4, 5]$ ισχύει $0 < f(x) < x^2 - x$

Άρα $\dfrac{1}{f(x)} > \dfrac{1}{x^2 - x}$

Επομένως

$$\int_4^5 \frac{1}{f(x)}dx > \int_4^5 \frac{1}{x^2 - x}dx = \int_4^5 \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \left[-\ln|x| + \ln|x-1|\right]_4^5 = \ln\frac{4}{3} - \ln\frac{5}{4} = \ln\frac{16}{15}$$

Διότι $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x-1} = \dfrac{(x-1)A_1 + xA_2}{x^2 - x} = \dfrac{(A_1 + A_2)x - A_1}{x^2 - x}$

Άρα $\left.\begin{array}{r} A_1 + A_2 = 0 \\ -A_1 \qquad = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_2 = 1 \\ A_1 = -1 \end{array}$

A4. $h(x) = \ln\left(e^x - x\right) - x$. Πρέπει $e^x - x > 0$.

Όμως ισχύει $\ln x \le x - 1$ για κάθε x> 0

Αν θέσουμε όπου x> 0 το e^x έχουμε:

$\ln e^x \le e^x - 1 \Leftrightarrow x + 1 \le e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0

Άρα $e^x \ge x + 1 > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $D_h = \mathbb{R}$, h συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων με

$h'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - 1$, h΄ συνεχής παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις εκθετ. – πολ.

$$h''(x) = \frac{\left(e^x - 1\right)' \cdot \left(e^x - x\right) - \left(e^x - x\right)' \cdot \left(e^x - 1\right)}{\left(e^x - x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^x\left(e^x - x\right) - \left(e^x - 1\right) \cdot \left(e^x - 1\right)}{\left(e^x - x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - x \cdot e^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{2e^x - x \cdot e^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2}$$

Θεωρούμε συνάρτηση $A(x) = 2e^x - x \cdot e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

$A'(x) = 2e^x - e^x - x \cdot e^x = e^x - x \cdot e^x = e^x\left(1 - x\right)$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$A'(x)$	+ 0 −
$A(x)$	↗ Ο.Μ ↘

Η $A(x)$ συνεχής στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$

Η $A(x)$ γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$\lim\limits_{x\to-\infty} A(x) = -1,$, διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$ και $A(1) = e - 1$

Άρα $A(\Delta_1) = (-1, e-1]$

Η $A(x)$ συνεχής στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$

Η $A(x)$ γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$\lim\limits_{x\to1^+} A(x) = ... = e - 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = -\infty$ διότι

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2e^x - xe^x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(2 - x\right) = -\infty$

Άρα $A(\Delta_2) = (-\infty, e-1)$

$0 \in A(\Delta_1)$. Άρα υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $A(x_1) = 0$ και επειδή η $A(x) \uparrow \Delta_1$ τότε το x_1 είναι μοναδικό.

$0 \in A(\Delta_2)$. Άρα υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $A(x_2) = 0$ και επειδή η $A(x) \downarrow \Delta_2$ το x_2 είναι μοναδικό.

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- $x < x_1 \overset{A(x)\uparrow}{\Leftrightarrow} A(x) < A(x_1) = 0$.

  Άρα $h''(x) = \dfrac{A(x)}{\left(e^x - x\right)^2} < 0$ για κάθε $x<x_1$.Άρα η $h(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty, x_1]$

- $x_1 < x \le 1 \overset{A(x)\uparrow}{\Leftrightarrow} A(x_1) < A(x) \Leftrightarrow 0 < A(x)$.

  Άρα $h''(x) = \dfrac{A(x)}{\left(e^x - x\right)^2} > 0$ για κάθε $x_1<x\le 1$.

- $1 < x < x_2 \overset{A(x)\downarrow}{\Leftrightarrow} A(x) > A(x_2) = 0$.

  Άρα $h''(x) = \dfrac{A(x)}{\left(e^x - x\right)^2} > 0$ για κάθε $1 <x<x_2$. Οπότε $h''(x) > 0$ για κάθε $x_1 < x < x_2$ Άρα η $h(x)$ είναι κυρτή στο $[x_1, x_2]$

- $x_2 < x \overset{A(x)\downarrow}{\Leftrightarrow} A(x_2) > A(x) \Leftrightarrow 0 > A(x)$.

Άρα $h''(x) = \dfrac{A(x)}{\left(e^x - x\right)^2} < 0$ για κάθε $x>x_2$. Άρα η $h(x)$ είναι κοίλη στο $[x_2, +\infty)$

Άρα η C_h έχει δύο σημεία καμπής, τα $K(x_1, h(x_1))$, $\Lambda(x_2, h(x_2))$

A5. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1-e^{-x}\right)\cdot f(x)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-e^{-x}}{x}\cdot x\cdot \ln x\right) = 1\cdot 0 = 0$

επειδή: • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = 1$

• $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^5(x)\cdot \eta\mu\pi x}{(x-1)^6} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)^5\cdot\dfrac{\eta\mu\pi x}{x-1}\right) = 1^5\cdot(-\pi) = -\pi$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu\pi x}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\left(\pi\sigma\upsilon\nu\pi x\right) = \pi\cdot\sigma\upsilon\nu\pi = -\pi$

2. **Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \ln x$, $h(x) = \sqrt{x-1}$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν**

- $\dfrac{xf'(x)}{2} - g(x) > 0$ **για κάθε** $x > 0$
- $f(1) = 0$

B1. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h,g και την ευθεία x = 3.

B2. Να βρείτε το σημείο της C_h που απέχει από το σημείο Α(4,0) τη μικρότερη απόσταση

B3. Να δείξετε ότι $f(x) > g^2(x)$ για κάθε x>1

B4. Αν Ε(λ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον $x'x$ και τις ευθείες x = 1 , x = λ , με λ > 1 να δείξετε ότι: $E(\lambda) > \lambda\ln\lambda(\ln\lambda - 2) + 2\lambda - 2$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

<u>**Λύση**</u>

B1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = h(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \ln x$, $x \ge 1$.

Η φ(x) είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ φ(1)=0.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως διαφορά άρρητης - λογαριθμικής

$\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}} = \dfrac{x-1-2\sqrt{x-1}+1}{2x\sqrt{x-1}} = \dfrac{(\sqrt{x-1}-1)^2}{2x\sqrt{x-1}} > 0$ για κάθε $x \in (1,2)\cup(2,+\infty)$ και η φ(x) είναι συνεχής στο 2 και στο 1. Άρα η $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1.+\infty)$.

$x \ge 1 \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x) \ge \varphi(1) = 0$. Άρα $h(x) - g(x) \ge 0 \Leftrightarrow h(x) \ge g(x)$ για κάθε $x \ge 1$.
Οπότε

$$E(\Omega) = \int_1^3 |h(x) - g(x)| = \int_1^3 (h(x) - g(x))\,dx = \int_1^3 (\sqrt{x-1} - \ln x)dx = \frac{2}{3}\sqrt{8} - (3\ln 3 - 2)$$

επειδή $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x-1}dx = ... = \frac{2}{3}\left[(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 0) = \frac{2}{3}\sqrt{8}$

$\displaystyle\int_1^3 \ln x dx = ... = [x\ln x - x]_1^3 = 2\ln 3 - 3 + 1 = 3\ln 3 - 2$

B2. Έστω $B(x,h(x))$ σημείο της C_h όπου $h(x)=\sqrt{x-1}$

$$(AB)=\sqrt{(x-4)^2+(h(x)-0)^2}=\sqrt{x^2-8x+16+x-1}=\sqrt{x^2-7x+15}$$

Έστω $d(x)=\sqrt{x^2-7x+15} \quad , x\geq 1$

$$d'(x)=\frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+15}} \quad d'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$$

x	$+\infty$ 1 $\frac{7}{2}$
$d'(x)$	$-$ 0 $+$
$d(x)$	

C E

Άρα η $d(x)$ παρουσιάζει στο $x=\frac{7}{2}$ ολικό ελάχιστο . Άρα το σημείο της C_h που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $A(4,0)$ είναι το $\left(\frac{7}{2},\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

B3. $\frac{xf'(x)}{2}-\ln x>0 \Leftrightarrow f'(x)-\frac{2\ln x}{x}>0 \Leftrightarrow (f(x)-\ln^2 x)'>0$ για κάθε x>0 .

Έστω $G(x)=f(x)-\ln^2 x$ Οπότε $G'(x)>0$ για κάθε x>0 .Επομένως η Gείναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

x>1 $\overset{G\uparrow}{\Leftrightarrow} G(x)>G(1) \Leftrightarrow f(x)-\ln^2 x>0 \Leftrightarrow f(x)>g^2(x)$ για κάθε x>1.

B4. Ισχύει $f(x)\geq g^2(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=1 .Άρα

$$E(\lambda)=\int_1^\lambda |f(x)|\,dx=\int_1^\lambda f(x)dx$$

Αφού $f(x)\geq g^2(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 1$ τότε $E(\lambda)=\int_1^\lambda f(x)dx>\int_1^\lambda g^2(x)dx$ (1)

Όμως $\int_1^\lambda g^2(x)dx=\int_1^\lambda \ln^2 x dx=\int_1^\lambda (x)'\ln^2 x dx=\left[x\ln^2 x\right]_1^\lambda-\int_1^\lambda 2\ln x dx=$

$$=\left[x\ln^2 x\right]_1^\lambda-\left[2x\ln x\right]_1^\lambda+\int_1^\lambda 2dx=\left[x\ln^2 x-2x\ln x+2x\right]_1^\lambda=$$
$$=\lambda\ln^2\lambda-2\lambda\ln\lambda+2\lambda-2$$

Έστω $B(\lambda)=\lambda\ln^2\lambda-2\lambda\ln\lambda+2\lambda-2$, $\lambda>1$ οπότε $E(\lambda)>B(\lambda)$ για $\lambda>1$:   (2)

$$\lim_{\lambda\to+\infty}B(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda\ln^2\lambda-2\lambda\ln\lambda+2\lambda-2\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda\ln^2\lambda\left(1-\frac{2}{\ln\lambda}\right)+2\lambda-2\right]=+\infty$$

Άρα από την (2) έχουμε $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=+\infty$.