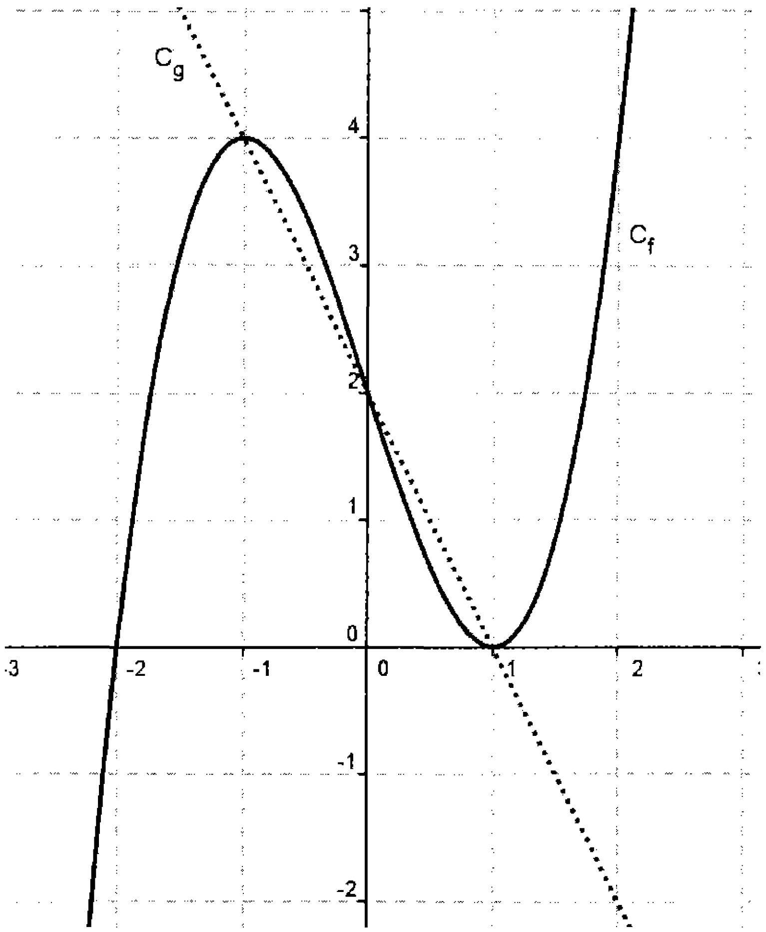
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)= -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = - 2x + 2$. (Μονάδες 6)

β) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. (Μονάδες 6)

γ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g. (Μονάδες 6)

δ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 7)

Λυση

α) $f(x) = -2x+2$ στα $A(-1,4)$, $B(1,0)$

β) $f(-1)=4$, $f(0)=2$, $f(1)=0$

γ) $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

δ) Απαιτώ $f(x)+2x-2\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow$
$x\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 4

Ο Στέφανος ζεσταίνει νερό, αρχικής θερμοκρασίας 25°C, και με χρήση ενός θερμομέτρου παρατηρεί ότι η θερμοκρασία του νερού αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 5°C ανά λεπτό.

α) Είναι η αντιστοιχία χρόνος → θερμοκρασία συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

Χρόνος (t) σε min		1	2	3		
Θερμοκρασία (θ) σε °C	25				50	60

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την αντιστοιχία χρόνος → θερμοκρασία, τοποθετώντας το χρόνο (t) στον οριζόντιο άξονα. (Μονάδες 5)

δ) Με χρήση της γραφικής παράστασης, να εκτιμήσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό (το νερό βράζει στους 100°C). Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 5)

ε) Να εκφράσετε αλγεβρικά τη σχέση που περιγράφει την αντιστοιχία χρόνος → θερμοκρασία και να υπολογίσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό. (Μονάδες 5)

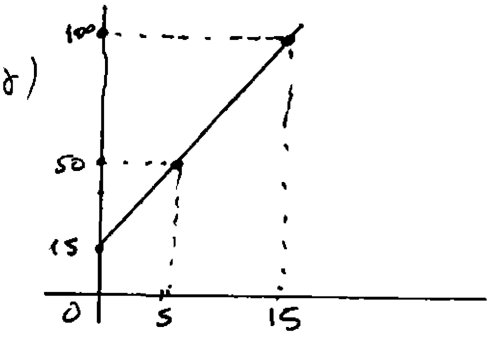
Λυση

α) Αν θ είναι η θερμοκρασία σε °C και $t \geq 0$ ο χρόνος σε λεπτά τότε $\theta = 25 + 5 \cdot t$ Άρα είναι συνάρτηση αφού σε κάθε χρονική στιγμή t αντιστοιχεί μοναδική τιμή της θερμ. θ.

β)

t	0	1	2	3	5	7
θ	25	30	35	40	50	60

γ)



δ) για $\theta = 100$ έχουμε $100 = 25 + 5 \cdot t \Leftrightarrow 75 = 5t \Leftrightarrow t = 15$ λεπτά

ΘΕΜΑ 4

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1[ης] ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2[ης] ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3[ης] ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5[ης] ημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από την στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 8[ης] ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

Λύση

Η επιφάνεια της κηλίδας στο τέλος της κάθε μέρας είναι όρος γεωμ. προόδου (a_ν) με $a_1=3$ και $\lambda=2$

α) $a_5 = a_1 \cdot \lambda^4 = 3 \cdot 2^4 = 48$ τ.μ.

β) $a_\nu = 768 \Leftrightarrow a_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 768 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{\nu-1} = 768 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 256 = 2^8 \Leftrightarrow$
$\nu - 1 = 8 \Rightarrow \nu = 9$. Στο τέλος της 9[ης] μέρας.

γ) $a_8 = a_1 \cdot \lambda^7 = 3 \cdot 2^7 = 384$ τ.μ.
Η επιφάνεια της κηλίδας κάθε μέρα μετά την 8[η] είναι όρος αριθμ. προόδου (β_ν) με $\beta_1 = 384$ και $\omega = -6$. Τότε
$\beta_\nu = 12 \Leftrightarrow \beta_1 + (\nu-1)\omega = 12 \Leftrightarrow 384 - 6\nu + 6 = 12 \Leftrightarrow 6\nu = 378 \Leftrightarrow \nu = 63$.
$\beta_{63} = 12$. Δηλαδή στο τέλος της 70[ης] μέρας μετά το ατύχημα.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0.$$ (Μονάδες 9)

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 \cdot x_2^2$.

(Μονάδες 9)

Λυση

$x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) $\Delta = 25\lambda^2 + 4 > 0$ για καθε $\lambda \in \mathbb{R}$ Αρα η εξισωση εχει δυο ριζες πραγματικές και ανισες για καθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) i) $(x_1+x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0 \Leftrightarrow 25\lambda^2 - 18 - 7(-1)^{24} = 0$

$\Leftrightarrow 25\lambda^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

ii) για $\lambda = 1$ $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \cdot x_2 = -1$

$x_1^2 \cdot x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 =$

$= -1 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = -16.$

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+16=0,\ \lambda\in(0,4).$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 16$, για κάθε $\lambda\in(0,4)$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16;
Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

Λύση

α) i) $\Pi = 2x_1+2x_2 = 2(x_1+x_2) = 2S = 8\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)$

ii) $E = x_1x_2 = P = 16$.

β) $\Pi\geq 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\geq 16 \Leftrightarrow \lambda+\frac{1}{\lambda}\geq 2 \overset{\lambda\in(0,4)}{\Longleftrightarrow}$
$\lambda^2-2\lambda+1\geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2\geq 0$ που ισχύει.

γ) $\Pi=16 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ τότε
$\Delta = 16\cdot 4-16\cdot 4=0$ άρα οι ρίζες είναι ίσες
άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0 \quad \text{με} \quad \lambda \in (0, 2)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \le 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$ (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

Λύση

α) i) $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2S = 4$

ii) $E = x_1 \cdot x_2 = P = \lambda(2-\lambda)$

β) $E \le 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) \le 1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \le 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \ge 0$ που ισχύει.

γ) $E = 1 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ τοτε

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 = 0$ άρα οι ρίζες είναι ισες

άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6,\ 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = a^2 - 5|a| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Το τριώνυμο x^2-5x-6 με $\Delta = 25+24 = 49$ έχει ρίζες $x = \frac{5\pm 7}{2} \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=6$

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
x^2-5x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

άρα $x^2-5x-6<0 \Leftrightarrow x \in (-1,6)$

β) $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 - 5\left(-\frac{46}{47}\right) - 6.$

και $-1 < -\frac{46}{47} < 6$ άρα $K<0$ (α)

γ) $\alpha \in (-6,6) \Leftrightarrow -6 < \alpha < 6 \Rightarrow |\alpha| < 6.$ άρα

$-1 < 0 \le |\alpha| < 6.$

$\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6 = |\alpha|^2 - 5|\alpha| - 6 \overset{(\alpha)}{<} 0.$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^o$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη *x*, *y* τέτοια, ώστε: $x+y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του *x* δίνεται από τον τύπο:

$$E(x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x),\ x\in(0,\,10).$$ (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E(x)\le\frac{25}{2}$ για κάθε $x\in(0,\,10)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $x\in(0,\,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ; (Μονάδες 8)

Λυση.

α) $\left.\begin{array}{l} E=\frac{1}{2}x\psi \\ x+\psi=10 \end{array}\right\} \to E(x)=\frac{x(10-x)}{2} \to E(x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x)$

$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ \psi>0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x>0 \\ 10-x>0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x>0 \\ x<10 \end{array}\right\} \to x\in(0,10)$

β) $E(x)\le\frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-x^2+10x)\le\frac{25}{2} \Leftrightarrow -x^2+10x\le 25$

$\Leftrightarrow x^2-10x+25\ge 0 \Leftrightarrow (x-5)^2\ge 0$ που ισχύει.

γ) $E(x)=\frac{25}{2} \overset{(β)}{\Leftrightarrow} (x-5)^2=0 \Leftrightarrow x=5.$ αρα και $\psi=5$.

Αρα το τριγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία *TAXI* με το όνομα *'RED'* χρεώνει *1 ευρώ* με την είσοδο στο *TAXI* και *0,6 ευρώ* για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Μια άλλη εταιρεία *TAXI* με το όνομα *'YELLOW'* χρεώνει *2 ευρώ* με την είσοδο στο *TAXI* και *0,4 ευρώ* για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία *'RED'* για μια διαδρομή *x* χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. (Μονάδες 3)

x (km)	0	2	8
$f(x)$ *(ευρώ)*			

ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία *'YELLOW'* για μια διαδρομή *x* χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. (Μονάδες 3)

x (km)			
$g(x)$ *(ευρώ)*	2	3,2	4,8

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους $f(x)$, $g(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας *'RED'* είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

δ) Αν δυο πελάτες *Α* και *Β* μετακινηθούν με την εταιρεία *'RED'* και ο πελάτης *Α* διανύσει *3* χιλιόμετρα παραπάνω από τον *Β*, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο *Α* σε σχέση με τον *Β*. (Μονάδες 3)

Λύση

α) i)

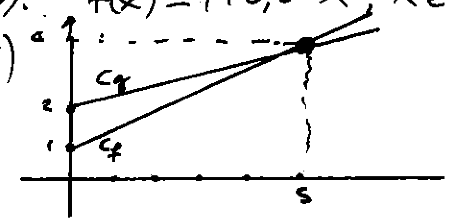
x	0	2	8
f(x)	1	3,2	5,8

ii)

x	0	3	7
g(x)	2	3,2	4,8

β). $f(x) = 1 + 0,6 \cdot x$, $x \in [0, 15]$, $g(x) = 2 + 0,4 \cdot x$, $x \in [0, 15]$.

γ)



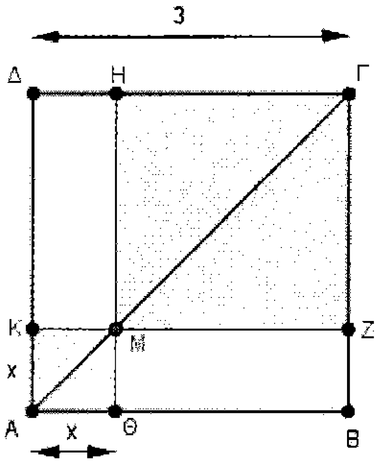
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 + 0,6 \cdot x = 2 + 0,4 \cdot x \Leftrightarrow 0,2 \cdot x = 1 \Leftrightarrow x = 5$

Από το σχήμα η "RED" είναι φθηνότερη της "YELLOW" για αποστάσεις μικρότερες από 5 Km

δ) Η διαφορά τους είναι $0,6 \cdot 3 = 1,8$ €

ΘΕΜΑ 4

Στο επόμενο σχήμα το *ΑΒΓΔ* είναι τετράγωνο πλευράς *ΑΒ=3* και το *Μ* είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου *ΑΓ*. Έστω *Ε* το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0,3)$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0,3)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια θέση του *Μ* πάνω στην *ΑΓ* το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λυση

α) $E = (KM\Theta A) + (MZ\Gamma H) = x^2 + (3-x)^3 = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0,3)$

β) $E \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-3)^2 \geq 0$ που ισχύει.

γ) $E = \frac{9}{2} \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών *α, β* και εμβαδόν *Ε,* τέτοια ώστε οι αριθμοί *α, Ε, β,* με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $E=1$ (Μονάδες 10)

β) Αν $\alpha+\beta=10$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη *α, β* (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη *α, β* (Μονάδες 10)

Λυση

α) $E=\alpha\beta$ εχουμε $\alpha, \alpha\beta, \beta$ διαδοχικοί οροι γεωμ. προοδου. αρα

$(\alpha\beta)^2=\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha\beta)^2-\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha\beta-1)=0 \Leftrightarrow$

$\alpha\beta=0$ (απορ) ή $\alpha\beta=1$ αρα $E=1$

β) $\alpha+\beta=10$

i) $x^2-Sx+P=0$ με $S=\alpha+\beta=10$, $P=\alpha\beta=1$

αρα $x^2-10x+1=0$. με $\Delta=100-4=96$

αρα $x=\dfrac{10\pm\sqrt{96}}{2}=\dfrac{10\pm4\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow$

$x=5+2\sqrt{6}$ ή $x=5-2\sqrt{6}$

Αρα $(\alpha,\beta)=(5+2\sqrt{6}, 5-2\sqrt{6})$ ή $(\alpha,\beta)=(5-2\sqrt{6}, 5+2\sqrt{6})$